
Zadanie 1
Zbadaj, czy istnieją pochodne poniższych funkcji w punkcie $x_0 = 0$. Skorzystaj z definicji.

(a) $f(x) = x|x|$

(b) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

Zadanie 2
Oblicz pochodne poniższych funkcji. Skorzystaj z definicji.

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \neq 0$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, $x \neq k\pi$, $k \in Z$

(d) $f(x) = e^{-x}$, $x \in R$

Zadanie 3
Rozstrzygnij, badając pochodne jednostronne, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{dla } x \geq 1 \\ 3x^3 & \text{dla } x < 1 \end{cases}$ $x_0 = 1$

(b) $f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ $x_0 = 0$

(c) $f(x) = x^2 + |x^2 - 4|$, $x_0 = 2$

(d) $f(x) = |x - \pi|\sin x$, $x_0 = \pi$

Zadanie 4
Zbadaj, czy poniższe funkcje mają pochodne niewłaściwe we wskazanych punktach.

(a) $f(x) = \sin\sqrt[5]{x}$, $x_0 = 0$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 0$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{\mathrm{ctg}x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Zadanie 5
Oblicz pochodne poniższych funkcji. Skorzystaj z reguł różniczkowania.

(a) $y = x^7 - 4x^5 + 13x^4 - x + 19$

(b) $y = \frac{4x^5 - 2}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

(c) $y = \frac{4x^7 + 3x^5 - 2x^4 + 7x - 2}{3x^4}$

(d) $y = 4x^3\sqrt{x}$

(e) $y = \frac{3x^2 - 4x\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt{x}}$

(f) $y = \sqrt[3]{x^2\sqrt{x\sqrt[4]{x^3}}}$

(g) $y = x^3\cos x$

(h) $y = \frac{2 - x^2}{2x^3 + x + 3}$

(i) $y = (4x^5 - 7x^3 + 14x^2 - 5)^3$

(j) $y = \sqrt{3x^2 - 7x + 12}$

(k) $y = \sin 4x$

(l) $y = \cos^3 x$

(m) $y = e^{-x}$

(n) $y = e^{4x^3 - 6x + 1}$

(o) $y = \mathrm{tg}^4 2x$

(p) $y = \sin^3\sqrt{\frac{1 - 2x}{x}}$

(r) $y = \frac{x + 1}{\sqrt{1 - x}}$

(s) $y = x\sqrt{x^2 + 1}$

(t) $y = 4^x\,\mathrm{arctg}x$

(u) $y = \ln\mathrm{tg}\frac{x}{3}$

(w) $y = \arcsin\sqrt[4]{1 - 5x}$

(v) $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^x})$

(x) $y = x^x$, $x>0$

(y) $y = \sin^7\frac{2^x + 1}{3^x + 1}$

(z) $y = \mathrm{arctg}x\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$

Zadanie 6
Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej oblicz.

(a) $(f^{-1})'(y)$ dla

(i) $f(x) = e^x$, gdzie $x \in R$

(ii) $f(x) = \mathrm{ctg}x$, gdzie $0 < x < \pi$

(b) (i) $(f^{-1})'(3)$, gdzie $f(x) = x^5 + x + 1$

(ii) $(g^{-1})'(3)$, gdzie $g(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$

Zadanie 7
Zakładając, że funkcje f i g mają pochodne właściwe, oblicz pochodne funkcji.

(a) $y = \log_{f(x)} g(x)$

(b) $y = \mathrm{arctg}\frac{f(x)}{g(x)}$

(c) $y = \sqrt[3]{f^2(x) + g^2(x)}$

(d) $y = \frac{\sin f(x)}{\cos g(x)}$

Zadanie 8
Napisz równanie stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach.

(a) $f(x) = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$, $(-1, f(-1))$

(b) $f(x) = x^x$, $(2, f(2))$

Bibliografia
[M Gewert, Z Skoczylas AM1PiZ], [M Gewert, Z Skoczylas AM1DTW], [W Krysicki, L Włodarski AMwZczI]