Temat 06: **Różniczkowanie a ciągłość funkcji. Różniczka funkcji i jej zastosowanie. Twierdzenia o wartości średniej (Rolle'a, Lagrange'a, Cauchy'ego). Kryteria monotoniczności funkcji różniczkowalnych. Reguła de l'Hospitala. Ekstrema lokalne.**

Zadanie 1

Dana jest funkcja $f(x) = 6x^5 - 5x^4 - 24x^3 + 2x - 1$. Korzystając z twierdzenia Rolle'a wykaż, że w przedziale (-2,3) istnieje pierwiastek równania $f(x) = 0$.

Zadanie 2

Sprawdź, czy podane funkcje spełniają założenia twierdzenia Rolle'a na zadanych przedziałach

(a) $f(x) = x(x^2 - 1)$, $[-1,1]$ (b) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$, $[-1,1]$

(c) $f(x) = (|x| - 1)^2$, $[-1,1]$

Zadanie 3

Wykaż, korzystając z twierdzenia Lagrange'a, że funkcja $f(x) = \ln(3x + 2)$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $(1,\infty)$.

Zadanie 4

Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnij poniższe nierówności

(a) $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ dla x>0 (b) $e^x > 1 + x$ dla x>0

Zadanie 5

Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x + \sin^2 2x$.

Zadanie 6

Znajdź przedziały monotoniczności podanych funkcji

(a) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$ (b) $f(x) = x\ln x$

(c) $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$ (d) $f(x) = e^x \cos x$

Zadanie 7

Korzystając z definicji uzasadnij, że podane funkcje mają ekstrema lokalne we wskazanych punktach.

(a) $f(x) = 2 + |x - 1|$, $x_0 = 1$ (b) $f(x) = 4 - 3x^{100}$, $x_0 = 0$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ $x_0 = 0$ (d) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leq -1 \\ 2 - x & \text{dla } x > -1 \end{cases}$ $x_0 = -1$

Zadanie 8

Znajdź wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji

(a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$ (b) $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$

(c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ (d) $f(x) = x^x$

Zadanie 9

Oblicz poniższe granice. Skorzystaj z twierdzenia de l'Hospitala.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln\sin x}$

(c) $\lim_{x\to 1^-} \frac{2^x - 2^{2-x}}{(x-1)^2}$ (d) $\lim_{x\to -\infty} [x(e^{\frac{1}{x}} - 1)]$

(e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln(x+1) - \ln x}$ (f) $\lim_{x\to 1^-} [\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)\ln(1-x)]$

(g) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$ (h) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

(i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln\cos x}$ (j) $\lim_{x\to\infty}\left((x+3)e^{\frac{1}{x}} - x\right)$

Bibliografia: [GSAMIPiZ], [GSAMIDTW], [GMCzAMdN]