Zadanie 1 **rząd I**

Uzasadnij zbieżność poniższego ciągu. Skorzystaj z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym.

$$x_n = \frac{2^n}{n!}$$

Zadanie 2

Zbadaj zbieżność poniższego szeregu. Skorzystaj z kryterium d'Alamberta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n - 4^n}$$

Zadanie 3

Określ zbiór punktów ciągłości poniższej funkcji.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Zadanie 4

Oblicz pochodną poniższej funkcji. Skorzystaj z reguł różniczkowania.

$$y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^x})$$

Zadanie 5

Oblicz poniższą granicę. Skorzystaj z twierdzenia de l'Hospitala.

$$\lim_{x \to -\infty} \left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right]$$

Wskazówki

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in [-1,1]$
- $(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in R$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$
- $\forall_{x \neq 0} \; -|x| \leq x \sin\frac{1}{x} \leq |x|$
- $\pi \approx 3.14$, $e \approx 2.71828$

Analiza Matematyczna 2012/2013; inf. D.; sem. I; kolokwium1

Zadanie 1 **rząd II**

Wyznacz poniższą granicę. Skorzystaj z twierdzenia o trzech ciągach.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n}$$

Zadanie 2

Zbadaj zbieżność poniższego szeregu. Skorzystaj z kryterium d'Alamberta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

Zadanie 3

Określ zbiór punktów ciągłości poniższej funkcji.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{|x - 1|} & \text{dla } x \neq 1 \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Zadanie 4

Oblicz pochodną poniższej funkcji. Skorzystaj z reguł różniczkowania.

$$y = 4^x \,\mathrm{arctg} x$$

Zadanie 5

Oblicz poniższą granicę. Skorzystaj z twierdzenia de l'Hospitala.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$$

Wskazówki

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in [-1,1]$
- $(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in R$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$
- $\forall_{x \neq 0} \; -|x| \leq x \sin\frac{1}{x} \leq |x|$
- $\pi \approx 3.14$, $e \approx 2.71828$

Zadanie 1 **rząd I**

Oblicz poniższą granicę. Skorzystaj z definicji liczby e oraz z twierdzenia o granicy podciągu.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{4n+1}\right)^n$$

Zadanie 2

Zbadaj zbieżność poniższego szeregu. Skorzystaj z kryterium Cauchy'ego.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\pi^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$$

Zadanie 3

Określ zbiór punktów ciągłości poniższej funkcji.

$$f(x)=E(x)$$

Zadanie 4

Zakładając, że funkcje f i g mają pochodne właściwe, oblicz pochodną funkcji.

$$y=\sqrt[3]{f^2(x)+g^2(x)}$$

Zadanie 5

Znajdź wszystkie ekstrema lokalne podanej funkcji

$$f(x)=x-\sqrt[3]{x}$$

Wskazówki

- $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in[-1,1]$
- $(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{x^2+1}$, $x\in R$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1$
- $E(x)=k$ dla $k\le x<k+1$, $k\in Z$
- $\pi\approx 3.14$, $e\approx 2.71828$

Analiza Matematyczna 2012/2013; inf. D.; sem. I; kolokwium1

Zadanie 1 **rząd II**

Uzasadnij zbieżność poniższego ciągu. Skorzystaj z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym.

$$y_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{2}{(n+1)!}$$

Zadanie 2

Zbadaj zbieżność poniższego szeregu. Skorzystaj z kryterium Cauchy'ego.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{arctg}n}{\pi}\right)^n$$

Zadanie 3

Uzasadnij ciągłość poniższej funkcji na R.

$$f(x)=E(x)\sin\pi x$$

Zadanie 4

Oblicz pochodną poniższej funkcji. Skorzystaj z reguł różniczkowania.

$$y=\arcsin\sqrt[4]{1-5x}$$

Zadanie 5

Znajdź wszystkie ekstrema lokalne podanej funkcji

$$f(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

Wskazówki

- $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in[-1,1]$
- $(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{x^2+1}$, $x\in R$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1$
- $E(x)=k$ dla $k\le x<k+1$, $k\in Z$
- $\pi\approx 3.14$, $e\approx 2.71828$