XII Konferencja *TERW Technologie Eksploracji i Reprezentacji Wiedzy*
13-15 września, 2017, Hołny Mejera, Polska

Leon BOBROWSKI
Wydział Informatyki Politechniki Białostockiej
E–mail: l.bobrowski@pb.edu.pl

Zagadnienie własne i algorytmy wymiany rozwiązań bazowych

Bierzemy pod uwagę kwadratową macierz $\boldsymbol{S} = [\mathbf{s}_1,\ldots, \mathbf{s}_n]^T$, której wiersze są utworzone są przez n niezerowych wektorów $\mathbf{s}_j = [s_{j,1},...,s_{j,n}]^T$, gdzie $(\forall j \in\{1,\ldots,n\})$ $\mathbf{s}_j \neq \mathbf{0}$. Zakładamy, że składowe $s_{j,i}$ n-wymiarowych wektorów $\mathbf{s}_j$ są liczbami rzeczywistymi ($s_{j,i} \in R^1$).

Zagadnienie własne z macierzą $\boldsymbol{S}$ polega na wyznaczeniu takich wartości własnych λ_i oraz wektorów własnych, które spełniają poniższe równanie [1]:

$$\boldsymbol{S}\, \mathbf{k}_i = \lambda_i\, \mathbf{k}_i \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{k}_i = [k_{i,1},...,k_{i,n}]^T$ jest i - tym wektorem własnym ($i = 1,\ldots, n$), oraz λ_i jest i-tą wartością własną ($\lambda_i \geq 0$).

Równanie (1) przedstawiane jest jako układ równań liniowych:

$$(\boldsymbol{S} - \lambda_i \boldsymbol{I})\, \mathbf{k}_i = \mathbf{0} \tag{2}$$

W celu wyznaczenia wartości własnych λ_i przyrównuje się zera wyznacznik układu równań (2) i znajduje miejsca zerowe równania charakterystycznego [1].

$$|\, \boldsymbol{S} - \lambda_i \boldsymbol{I}\, | = 0 \tag{3}$$

Inna metoda wyznaczenia wartości własnych λ_i została zaproponowana w pracy [2]. Metoda ta opiera się na indukowaniu poniższych zależności liniowych pomiędzy regularyzowanymi wektorami $\mathbf{s}_j - \lambda\, \mathbf{e}_j$ poprzez wybór odpowiednich wartości λ_i parametru λ:

$$(\forall i \in\{1,\ldots,n\}) \qquad \mathbf{s}_i - \lambda\, \mathbf{e}_i = \alpha_{i,1}\,(\mathbf{s}_1 - \lambda\, \mathbf{e}_1) + \ldots + \alpha_{n,n}(\mathbf{s}_n - \lambda\, \mathbf{e}_n) \tag{4}$$

gdzie $\mathbf{s}_i \in R^n$, $\lambda \in R^1$, $(\forall j \in\{1,\ldots, n\})$ $\alpha_{i,j} \in R^1$, and $\alpha_{i,i} = 0$.

Dla każdej wartości i układ n równań (4) ma n niewiadomych $\alpha_{i,j}$ oraz λ. Kolejne rozwiązania układu (4) pozwalają wyznaczyć wartości własne λ_i.

Zostało wykazane, że wektor własny $\mathbf{k}_i$ odpowiadający i – tej wartości własnej λ_i można uzyskać poprzez odwrócenie macierzy $\boldsymbol{S}_\lambda(i)$ o poniższej strukturze [2]:

$$\boldsymbol{S}_\lambda(i) = [\mathbf{z}_1(i),\ldots, \mathbf{z}_{i-1}(i), \mathbf{e}_i, \mathbf{z}_{i+1}(i),\ldots, \mathbf{z}_n(i)]^T \tag{5}$$

gdzie $\mathbf{e}_i = [0,\ldots,0,1,0,\ldots,0]^T$ jest i-tym wektorem własnym, oraz

$$(\forall j \in \{1,\ldots, n\}) \quad \mathbf{z}_j(i) = \mathbf{s}_j - \lambda_i \, \mathbf{e}_j \tag{6}$$

Macierz odwrotną $\boldsymbol{S}_\lambda(i)^{-1}$ można reprezentować jako:

$$\boldsymbol{S}_\lambda(i)^{-1} = [\mathbf{r}_1(i),\ldots, \mathbf{r}_i(i),\ldots, \mathbf{r}_n(i)] \tag{7}$$

Wektor własny $\mathbf{k}_i$ odpowiadający i-tej wartości własnej λ_i można wyznaczyć za pomocą i- tej kolumny $\mathbf{r}_i(i)$ macierzy odwrotnej $\boldsymbol{S}_\lambda(i)^{-1}$ [2]:

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{r}_i(i) \,/\, \| \mathbf{r}_i(i) \| \tag{8}$$

Odwracanie macierzy $\boldsymbol{S}_\lambda(i)$ (5) dogodnie jest wykonać za pomocą algorytmu wymiany rozwiązań bazowych [3]. W metodzie tej macierz odwrotną $\boldsymbol{S}_\lambda(i)^{-1}$ (7) buduje się w n-1 krokach k rozpoczynając od macierzy jednostkowej $\boldsymbol{I} = [\mathbf{e}_1,\ldots, \mathbf{e}_n]^T$. W kroku k-tym wektor jednostkowy $\mathbf{e}_k$ zostaje zamieniony na $\mathbf{z}_k(i)$ (6) (gdy $k < i$) lub wektor $\mathbf{e}_{k+1}$ zostaje zamieniony na wektor $\mathbf{z}_{k+1}(i)$ (gdy $k > i$). Zamianie każdego z wektorów $\mathbf{e}_k$ na $\mathbf{z}_k(i)$ (6) towarzyszy transformacja Gaussa-Jordana kolumn $\mathbf{r}_l(i)$ macierzy odwrotnej (7) [4].

Bibliografia

[1] Golub G. H., Van Loan Ch. F.: *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press (Fourth Edition), Baltimore 2013

[2] Bobrowski L.; ″Eigenvalue Problem with the Basis Exchange Algorithm″, *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, 23(6): 1-12, 2017 (http://www.sciencedomain.org/issue/2877)

[3] Bobrowski L; ″Large Matrices Inversion Using the Basis Exchange Algorithm″, *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 21(1): 1-11, 2017 (http://www.sciencedomain.org/abstract/18203)

[4]. Bobrowski L.: *Eksploracja danych oparta na wypukłych i odcinkowo-liniowych funkcjach kryterialnych*, Wydawnictwa Politechniki Białostockiej, Białystok,