

ZESTAW PYTAŃ

na egzamin dyplomowy licencjacki na kierunku Matematyka
dla absolwentów studiów stacjonarnych w roku akademickim 2015/2016

I. Logika i Teoria Mnogości oraz Matematyka Dyskretna

1. Omów aksjomatykę liczb naturalnych i indukcję matematyczną.
2. Omów podstawowe pojęcia rachunku zdań i rachunku kwantyfikatorów.
3. Omów podstawowe pojęcia dotyczące operacji na zbiorach. Co to jest iloczyn kartezjański zbiorów?
4. Omów pojęcie relacji, relacji równoważności.
5. Omów pojęcie funkcji (iniekcje, suriekcje, bijekcje, funkcje na zbiorach skończonych)
6. Omów zasadę włączeń/wyłączeń i podaj przykłady jej zastosowań.
7. Omów zasadę szufladkową Dirichleta. Podaj przykłady jej zastosowań.
8. Omów pojęcie równoliczności i mocy zbiorów oraz twierdzenie Cantora-Bernsteina.
9. Omów twierdzenie Cantora o mocy zbioru wszystkich podzbiorów.
10. Omów pojęcie przeliczalności oraz twierdzenie o nieprzeliczalności przedziału $[0,1]$.
11. Omów relacje porządkujące zbiór oraz rodzaje relacji porządkujących. Co to są liczby porządkowe?
12. Omów pojęcie rekurencji oraz metody rozwiązywania rekurencji liniowych rzędu pierwszego i drugiego.
13. Wyjaśnij pojęcie drzewa oraz podaj twierdzenie Cayleya o liczbie drzew.
14. Omów pojęcie i twierdzenie charakteryzujące grafy eulerowskie
15. Omów pojęcie i twierdzenie charakteryzujące grafy hamiltonowskie.
16. Omów pojęcie grafu planarnego oraz wzór Eulera dla grafów planarnych.

II. Algebra Liniowa

1. Omów ciało liczb zespolonych, postać algebraiczną i trygonometryczną liczby zespolonej oraz wzór de Moivre'a.
2. Omów pojęcie, własności i zastosowania wyznacznika.
3. Omów wzór Laplace'a i twierdzenie Cauchy'ego (dla wyznaczników).
4. Omów metody rozwiązywania układów równań liniowych. Omów twierdzenia Cramera i Kroneckera-Capelliego.
5. Omów pojęcie przestrzeni liniowej. Podaj przykłady przestrzeni liniowych.
6. Omów pojęcia bazy i wymiaru przestrzeni liniowej.
7. Omów pojęcia przekształcenia liniowego i jego macierzy.
8. Omów pojęcia wartości i wektorów własnych endomorfizmu liniowego.
9. Omów postać Jordana macierzy endomorfizmu liniowego.
10. Omów pojęcia przestrzeni sprzężonej, przekształcenia sprzężonego i bazy sprzężonej.
11. Omów pojęcia i własności form symetrycznych i antysymetrycznych.
12. Omów pojęcia formy kwadratowej i jej postaci kanonicznej. Omów metodę Lagrange'a sprowadzania formy kwadratowej do postaci kanonicznej.
13. Omów liniowe przestrzenie euklidesowe i ortogonalne. Omów nierówność Schwarz'a.
14. Omów pojęcie bazy prostopadłej przestrzeni euklidesowej. Omów ortogonalizację Grama-Schmidta.
15. Omów pojęcie wyznacznika Grama i przedstaw jego interpretację geometryczną.
16. Omów pojęcie i własności iloczynu wektorowego.
17. Omów pojęcie przestrzeni afinicznej. Podaj przykłady przestrzeni afinicznych.
18. Omów pojęcie przekształcenia afinicznego.

III. Analiza Matematyczna

1. Omów pojęcie zbieżności ciągu w przestrzeni metrycznej, w szczególności ciągu liczbowego.
2. Omów zbieżność i kryteria zbieżności szeregów liczbowych.
3. Omów pojęcie ciągłości funkcji jednej zmiennej rzeczywistej i podaj własności funkcji ciągłych.
4. Omów podstawowe funkcje elementarne.
5. Omów pojęcie i własności pochodnej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.
6. Omów badanie przebiegu zmienności funkcji, w szczególności sposoby szukania ekstremów lokalnych.
7. Omów wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.
8. Omów pojęcie i własności całki nieoznaczonej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Omów całkowanie przez części i przez podstawienie.
9. Omów pojęcie, własności i zastosowania całki oznaczonej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.
10. Omów zbieżność punktową i zbieżność jednostajną ciągów i szeregów funkcyjnych.
11. Omów zbieżność szeregów potęgowych i rozwijanie funkcji w szereg Taylora.
12. Omów rozwijanie funkcji w szereg Fouriera.
13. Omów analityczne metody szukania ekstremów lokalnych dla funkcji wielu zmiennych.
14. Omów pojęcia gradientu, macierzy Jacobiego i jakobianu.
15. Omów twierdzenia o funkcji odwrotnej i o funkcji uwikłanej.
16. Omów sposoby obliczania całki podwójnej, w szczególności po obszarze, który nie jest prostokątem.
17. Omów twierdzenie o zamianie zmiennych w całce podwójnej, w szczególności dla zmiennych biegunowych.
18. Omów różnice między całką krzywoliniową skierowaną i całką krzywoliniową nieskierowaną.
19. Omów pojęcia dywergencji i rotacji.
20. Omów pojęcia orientacji powierzchni i całki powierzchniowej zorientowanej.
21. Omów twierdzenie Stokesa i twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego.
22. Omów pojęcie pola potencjalnego i niezależności od drogi całkowania.
23. Omów pojęcie i kryteria różniczkowalności funkcji zespolonej.
24. Omów całkwalne typy równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego.
25. Omów metodę rozwiązywania równań różniczkowych liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach.
26. Omów strukturę rozwiązań równań różniczkowych liniowych niejednorodnych i metodę uźmienniania stałych.
27. Omów sposoby rozwiązywania układu równań różniczkowych postaci $x' = Ax$.
28. Omów transformację Laplace'a i jej zastosowania.

IV. Topologia

1. Przestrzeń metryczna: definicja i przykłady. Zbiory otwarte, domknięte, gęste. Przestrzeń ośrodkowa
2. Przekształcenia ciągłe przestrzeni metrycznych; definicja i charakterystyczne. Homeomorfizmy. Przestrzeń funkcji ciągłych.
3. Przestrzeń zwarta; definicja i charakterystyczne metrycznych przestrzeni zwartych. Podzbiory zwarte w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Przekształcenia ciągłe przestrzeni zwartych. Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym.
4. Przestrzeń spójna; definicja, charakterystyczne i przykłady. Przestrzeń łukowo spójna.
5. Przestrzeń metryczna zupełna; definicja, przykłady i charakterystyczne. Twierdzenie Baire'a. Związki między przestrzeniami zupełnymi i zwartymi. Twierdzenie Banacha o odwzorowaniu zwężającym.

V. Algebra

1. Omów pojęcie grupy, podgrupy i dzielnika normalnego.
2. Omów konstrukcję grupy ilorazowej.
3. Omów pojęcie homomorfizmu grup oraz twierdzenie o izomorfizmie dla grup.
4. Omów twierdzenie Lagrange'a dla grup oraz wnioski z tego twierdzenia.
5. Omów pojęcie grupy rozwiązalnej.
6. Omów własności grup permutacji. Kiedy grupy permutacji są rozwiązalne?
7. Omów własności grup abelowych ze szczególnym uwzględnieniem struktury skończonych grup abelowych.
8. Omów pojęcie grupy prostej. Podaj przykłady grup prostych.
9. Omów pojęcie pierścienia, podpierścienia i ideału.
10. Omów konstrukcję pierścienia ilorazowego.
11. Omów pojęcie homomorfizmu pierścieni oraz twierdzenia o izomorfizmach dla pierścieni.
12. Omów pojęcie jednoznaczności rozkładu w pierścieniach. Podaj przykłady pierścieni z jednoznacznością rozkładu i bez tej własności.
13. Omów pierścienie ideałów głównych.
14. Omów zagadnienie rozkładalności wielomianów o współczynnikach całkowitych, wymiernych, rzeczywistych lub zespolonych.
15. Omów pojęcie ciała rozkładu wielomianu oraz pojęcie stopnia rozszerzenia ciał.
16. Omów zasadnicze twierdzenie algebry.
17. Omów klasyczne konstrukcje geometryczne. Wyjaśnij powody niewykonalności wybranych konstrukcji.

VI. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna

1. Omów pojęcie niezależności zdarzeń.
2. Omów schemat Bernoulliego.
3. Omów pojęcie dystrybuanty jednowymiarowej zmiennej losowej.
4. Podaj własności dystrybuanty jednowymiarowego rozkładu normalnego.
5. Sformułuj prawo wielkich liczb Bernoulliego. Omów rolę nierówności Czebyszewa w dowodzie tego prawa.
6. Podaj przykład zastosowania prawa wielkich liczb Bernoulliego.
7. Sformułuj centralne twierdzenie graniczne i podaj przykład zastosowania.
8. Omów własności wartości oczekiwanej i wariancji jednowymiarowych zmiennych losowych. Podaj wartości wskazanych parametrów dla wybranych rozkładów ciągłych oraz dyskretnych.
9. Omów rozkład Poissona i jego związek z rozkładem normalnym. Podaj przykład zastosowania.
10. Omów pojęcie estymacji przedziałowej. Podaj modele przedziałów ufności dla średniej.
11. Omów rodzaje błędów popełnianych przy weryfikacji hipotez statystycznych.
12. Omów testy pozwalające na weryfikację hipotezy o niezależności zmiennych losowych.

VII. Komputerowe narzędzia matematyki

1. Omów podstawy analizy błędów obliczeń numerycznych.
2. Omów metodę eliminacji Gaussa rozwiązywania układów równań liniowych, obliczania macierzy odwrotnej i wyznacznika.
3. Omów metodę iteracji prostej Jacobiego rozwiązywania układów równań liniowych.
4. Omów metodę bisekcji i siecznych rozwiązywania równań nieliniowych.
5. Omów metodę stycznych i iteracyjną rozwiązywania równań nieliniowych.
6. Przedstaw metodę iteracyjną rozwiązywania układów równań nieliniowych.
7. Krótko przedstaw numeryczne metody obliczania wartości funkcji.

8. Krótko przedstaw metodę średniokwadratowej aproksymacji wielomianowej.
9. Omów metodę interpolacji Lagrange'a i Newtona.
10. Krótko omów wzory prostokątów, trapezów i parabol obliczania całek pojedynczych.
11. Krótko przedstaw metodę rozwiązywania zagadnienia początkowego równań różniczkowych zwyczajnych metodą Eulera.
12. Krótko omów metodę rozwiązywania zagadnienia początkowego równań różniczkowych zwyczajnych metodą Rungego-Kutty rzędu czwartego.

VIII. Podstawy programowania i Programowanie obiektowe

1. Omów i porównaj paradygmaty programowania strukturalnego i obiektowego.
2. Omów metody przekazywania parametrów.
3. Zmienne w programowaniu: typ, wskazania na zmienną (nazwa, wskaźnik, referencja), tworzenie, usuwanie.
4. Omów mechanizmy rekurencyjne w programowaniu.
5. Omów pojęcie interfejsu i implementacji klasy.
6. Omów mechanizm tworzenia nowych klas na podstawie klas istniejących: kompozycję i dziedziczenie – wyjaśnij podobieństwa i różnice, podaj przykłady.

IX. Algorytmy i struktury danych

1. Omów pojęcie poprawności algorytmu.
2. Złożoność algorytmu. Omów różne rodzaje miar złożoności algorytmu. Jak należy rozumieć złożoność problemu algorytmicznego?
3. Wymień poznane typy struktur danych oraz podaj przykłady poznanych algorytmów operujących na tych strukturach.
4. Omów poznane algorytmy sortowania ciągu wartości oraz podaj informację o strukturach danych, na których operują.
5. Podaj przykład algorytmu znajdowania słowa w tekście o złożoności liniowej.
6. Omów poznane algorytmy mnożenia wielomianów.
7. Omów poznane algorytmy związane z obliczaniem iloczynu macierzy.
8. Podaj przykłady struktur danych używanych w implementacjach operacji *member*, *insert*, *delete* na zbiorach.
9. Algorytmy grafowe; omów poznane algorytmy znajdowania dróg Eulera i Hamiltona.
10. Algorytmy grafowe, grafy z wagami; omów poznane algorytmy znajdowania minimalnego drzewa rozpinającego grafu.
11. Algorytmy grafowe, grafy z wagami; wymień poznane algorytmy znajdowania najkrótszych dróg i omów jeden z nich.
12. Problem maksymalizacji przepływu w sieci; omów przykładowy algorytm znajdowania maksymalnego przepływu w sieci.
13. Na przykładzie algorytmu znajdowania maksymalnego skojarzenia w grafie dwudzielnym i algorytmu znajdowania maksymalnego selektora (systemu reprezentantów) omów pojęcie sprowadzalności algorytmów.
14. Omów problemy o dużej złożoności obliczeniowej. Klasy P i NP. Hipoteza $P \neq NP$.
15. Podaj przykład problemu o złożoności większej niż wielomianowa.

X. Bazy danych

1. Omów pojęcie i znaczenie kluczy w relacyjnych bazach danych.
2. Omów typy zapytań SQL.
3. Scharakteryzuj relacyjny model bazy danych.
4. Omów podstawowe właściwości transakcji (ACID).